

Optimización combinatorial usando colonias de agentes cooperantes y aprendizaje reforzado

JUAN CARLOS HENAO

Docente Catedrático UCPR
Docente Institución Educativa El Dorado
Ingeniero Electricista.
Candidato a Magíster en Ingeniería Eléctrica
henaoluancarlos@hotmail.com

JUAN LUIS ARIAS

Director Departamento de Ciencias Básicas UCPR
Docente Catedrático auxiliar UTP
Ingeniero Industrial
Magíster en la Enseñanza de las Matemáticas
jlarias@ucpr.edu.co

RESUMEN

Existe un conjunto de problemas que por su tamaño y complejidad no pueden ser resueltos con métodos exactos y precisan de métodos combinatoriales para encontrar soluciones de buena calidad; la forma como la naturaleza resuelve sus problemas ha inspirado a muchos investigadores a desarrollar algoritmos que simulan algunas de estas cualidades. El presente artículo trata sobre las ventajas de un método llamado "Colonias de Hormigas", de sus propiedades y de los posibles alcances. Para medir el impacto del algoritmo, el modelo de prueba que se escogió fue el "Problema del Vendedor Viajante" (TSP), puesto que es uno de los más ampliamente difundidos en la literatura especializada.

PALABRAS CLAVES: *Colonias de Hormigas, Optimización, Feromona, TSP, Complejidad matemática*

ABSTRACT

They exist a set of problems, that by their size and complexity cannot be solved with exact methods and need combinatorial methods to find solutions of good quality; The way as the nature solves this problems, has inspired to many investigators to develop algorithms that simulate these qualities. The present paper shows the advantages of the method "Ant Colony", their properties and applications. To

measure the impact of the algorithm, the benchmark problem chosen was the "Traveling Salesman Problem" (TSP), since one is of more widely spread in specialized Literature.

KEYWORDS: *Ant Colony, Optimization, Pheromone, TSP*

1. INTRODUCCIÓN

El algoritmo combinatorial “Colonias de Hormigas” o por sus siglas en inglés Ant-Q es una mejora sustancial del algoritmo Ant System, que hace parte de los algoritmos de aprendizaje reforzado, desarrollado a mediados de los años 80 por Marco Dorigio. Es considerado como un algoritmo meta-heurístico inspirado en la forma como las hormigas reales resuelven el problema de encontrar comida a pesar de sus limitaciones físicas como son una visión prácticamente nula y un sistema nervioso muy sencillo.

Las cualidades del algoritmo se prueban con problemas clásicos de optimización, entre ellos el problema del “Vendedor Viajante” o “Cartero Viajante” que en términos generales busca identificar para un agente viajero y un conjunto de ciudades, las cuales debe visitar, la ruta más corta que las una a todas si repetir ninguna. Se opta por este problema, pues se conocen para ciertas configuraciones soluciones de buena calidad y de los algoritmos desarrollados entorno a este mismo problema se conocen sus desempeños; en este orden de ideas, es posible entonces comparar el impacto de realizar ajustes y cambios en el algoritmo convencional y así establecer la conveniencia o no de adoptar dichas modificaciones.

2. PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJANTE (TSP)

La cantidad de variables en los problemas combinatoriales, determina la complejidad y el esfuerzo computacional necesario para hallar la respuesta óptima, partiendo de este punto es posible entonces clasificar los problemas de optimización combinatoriales en dos grupos:

Problemas Polinomiales o Problemas Tipo P: Son problemas para los cuales existen algoritmos computacionales de tipo polinomial, que permiten encontrar la solución óptima global del problema en tiempos racionales.

Problemas No Polinomiales o tipo NP: Estos son problemas a los cuales no se les conoce algoritmo polinomial capaz de encontrar la respuesta óptima en un tiempo razonable¹.

Dentro del grupo de problemas NP existen algunos problemas especialmente difíciles de resolver por su naturaleza propia, estos problemas reciben el nombre de Problemas Polinomiales Completos (NP-Hard), y aún no se ha comprobado ni siquiera la existencia de una solución óptima. Se les ha intentado encontrar la solución óptima por métodos

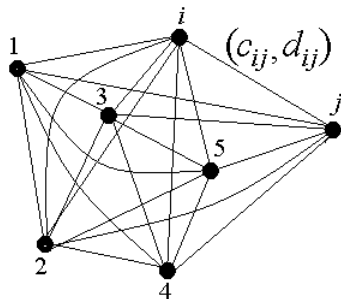
¹ Aún con las velocidades de los procesadores actuales, problemas combinatoriales no muy grandes, alrededor de 50 variables, tomaría siglos enteros evaluar cada una de las alternativas para poder hallar la solución óptima.

exactos, destacándose desarrollos como la metodología Branch and Bound y cortes de Benders; sin embargo en las fases iniciales de los métodos, los recursos informáticos se agotan sin ni siquiera explorar una mínima fracción del conjunto de soluciones²; por otro lado los algoritmos combinatoriales exploran parte de la región dentro de este espacio de soluciones, regiones prometedoras donde se sospecha la existencia de una solución subóptima de buena calidad. La forma en que se hace la búsqueda de soluciones de buena calidad es inteligente pues durante el proceso se va recogiendo información de la exploración lo que en su momento reorienta y ajusta el algoritmo. Entre los algoritmos combinatoriales de mayor éxito se encuentran los Genéticos, Meméticos, Búsqueda Tabú, Simulated Annealing, Graps, aprendizaje Reforzado, Sistema de la Hormiga y Colonia de Hormigas entre otros.

El problema del Vendedor Viajante o por sus siglas en inglés (TSP – Traveling Salesman Problem), para un sistema con más de 10 variables, empieza a convertirse en un problema NP y si adicional a esto no es simétrico y están asociados tiempos y prohibiciones de rutas, aún con una cantidad moderada de variables se torna NP–Hard.

En este problema, se tiene un conjunto de N ciudades tal que $N = \{1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, n\}$, las cuales pueden o no estar interconectadas todas entre si a través de un conjunto de caminos $E_{ij} = \{d_{ij} : i \neq j\}$ siendo d_{ij} la distancia entre la ciudad i y la ciudad j o también el costo de ir de la ciudad i a la ciudad j; si $d_{ij} \neq d_{ji}$ se dice que el problema es asimétrico. La figura 1 muestra un conjunto de n ciudades interconectadas entre sí por medio de caminos de distancia d_{ij} .

Figura No. 1 TSP. Sistema de n ciudades.



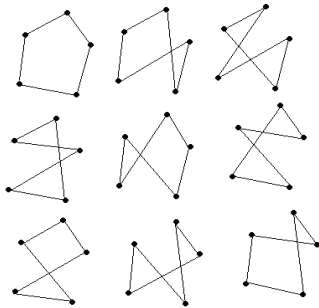
Fuente: Elaboración de los autores.

La naturaleza fundamental del problema del vendedor consiste en que un agente o un cartero debe visitar un conjunto de ciudades sin olvidar ninguna, pero también sin repetir

² Ese conjunto de soluciones forma lo que se conoce con el nombre de espacio de soluciones factibles

ninguna y el objetivo es que la ruta seleccionada como la suma algebraica de todos los caminos recorridos, tenga el menor costo posible. La figura 2, muestra 9 posibilidades de las 120 alternativas posibles, para un sistema muy pequeño, solo 5 ciudades.

Figura No. 2 Alternativas posibles para un sistema de 5 ciudades para el TSP.



Fuente: Elaboración de los autores.

Una estrategia para construir soluciones consiste en partir de cualquier punto y visitar la ciudad más cercana sin repetir ninguna hasta completar todas las ciudades, en este punto se dice que se completó un tour. Sin embargo, se ha demostrado que esta estrategia heurística obtiene soluciones de mala calidad pues se está limitando a una búsqueda muy local.

3. COMPORTAMIENTO DE LAS HORMIGAS REALES

En la búsqueda de métodos que permitan encontrar soluciones de buena calidad, los investigadores notaron ciertas particularidades en las hormigas naturales que implementaron efectivamente en sus algoritmos. Se sabe por la entomología, que las hormigas son insectos que carecen prácticamente del sentido de la visión y su cerebro es muy rudimentario, sin embargo se las arreglan para encontrar el alimento y llevarlo a su nido; este éxito evolutivo alcanzado por las hormigas reales se basa en dos pilares fundamentales:

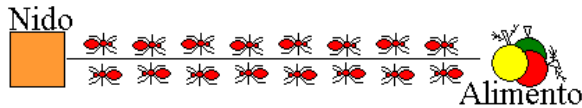
La cantidad de individuos que realizan la búsqueda.

La capacidad de comunicarse entre ellos.

Considérese por un instante, un individuo que realiza una búsqueda de alimento en su vecindario; mientras camina, va dejando un rastro químico (feromona) y cuando encuentra una fuente de alimento, regresa con una muestra del alimento a su nido, siguiendo una

ruta definida por propio rastro de feromona³, otras hormigas que perciben la muestra de alimento, evalúan su calidad y deciden o no, seguirlo a través del rastro dejado por la hormiga exploradora; cada hormiga que decide seguir el rastro aporta a este camino una intensificación química, lo que motiva eventualmente a la participación de una mayor cantidad de agentes

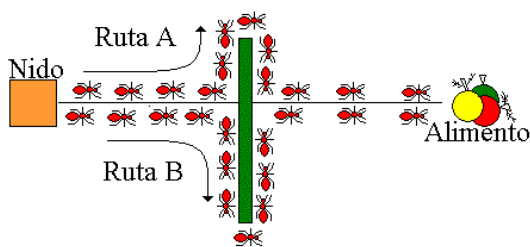
Figura No. 3 Hormigas siguiendo un rastro.



Fuente: Elaboración de los autores.

Ahora supóngase que el camino se ve interrumpido por algún obstáculo, en una segunda fase exploratoria los agentes intentan hallar un nuevo camino para lo cual encuentran dos alternativas o tomar el camino su derecha o tomar el camino a su izquierda; en una primera instancia ambos caminos se escogen con la misma probabilidad, sin embargo la corta longitud de uno de los caminos hace que el rastro químico de feromona se intensifique más rápidamente mientras el segundo camino va perdiendo paulatinamente su rastro.

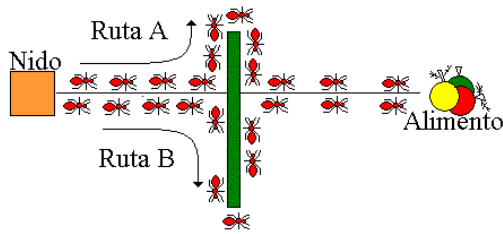
Figura No. 4 Presencia de un obstáculo.



Fuente: Elaboración de los autores.

Figura No. 5 Reacción de los Agentes.

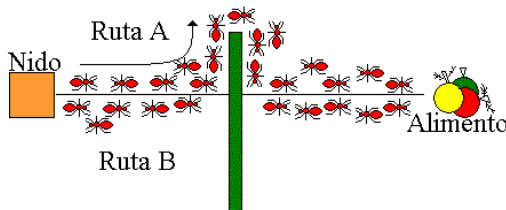
³ Aún los investigadores no se han puesto de acuerdo en la forma como la hormiga regresa a su nido una vez encuentra su objetivo, pues aunque la búsqueda es aleatoria y en todas las direcciones, una vez la hormiga encuentra su objetivo, regresa al nido siguiendo casi una línea recta.



Fuente: Elaboración de los autores.

Eventualmente los agentes determinan que uno de los caminos es mejor por cuanto la distancia recorrida es menor, en este sentido las hormigas realizan de forma natural optimizaciones combinatoriales.

Figura No. 6 Nueva ruta para la colonia.



Fuente: Elaboración de los autores.

El éxito de los agentes indudablemente está determinado por el rastro químico y no tanto por la cantidad de agentes, sin embargo en problemas cuyo espacio de soluciones sea grande, la cantidad de individuos que realizan la búsqueda en sí es un factor determinante.

Los investigadores de operaciones encontraron que se puede simular en términos matemáticos el comportamiento de las hormigas y de esta forma construyeron algoritmos de reforzamiento del aprendizaje lo cual vincula al algoritmo Ant-Q a los algoritmos de inteligencia artificial.

4. ALGORITMO BÁSICO DE OPTIMIZACIÓN

Intentando simular el comportamiento de las hormigas reales cuando buscan su alimento, el algoritmo “Colonias de Hormigas” (ACO) realiza en procesos iterativos la búsqueda y construcción de soluciones de problemas no polinomiales completos (NP-Hard) con herramientas probabilísticas. Parte del éxito tanto del algoritmo de Sistemas de Hormigas como el de Colonias de Hormigas para resolver problemas NP-Complejos se basa en las características importantes:

La información heurística proveniente de las características del problema.

Los rastros de feromona, como memoria adaptativa, cambian dinámicamente recopilando información sobre experiencias adquiridas en la búsqueda.

Esto le permite al algoritmo realizar una búsqueda inteligente dentro de todo el espacio de soluciones.

Tanto el algoritmo de Sistemas de Hormigas como el algoritmo de Colonias, se desarrollaron alrededor del problema del Agente Viajero, que es un problema combinatorial difícil de resolver cuando se consideran muchas variables.

El algoritmo de optimización basado en Colonias de Hormigas es un algoritmo metaheurístico estocástico cuyos agentes, las hormigas artificiales, construyen soluciones tomando decisiones de forma probabilística que dependen en esencia de dos elementos básicos: una función heurística que proviene del conocimiento profundo de las características y particularidades del problema, y de un rastro de feromona artificial el cual cambia dinámicamente con el tiempo y que recoge la experiencia de otros agentes cuando en su momento realizaron el proceso de búsqueda.

4.1. Desarrollo del Algoritmo

Marco Dorigo propone varios algoritmos combinatoriales basados en las estrategias de Aprendizaje Reforzado, uno de estos algoritmos es el denominado Sistemas de Hormigas (Ant System) [2] con sus tres sub-algoritmos ant-cycle, ant-density y ant-quantity.

En el sub-algoritmo de ant-quantity y ant-density, el rastro de feromona se actualiza una vez el agente haya pasado de un estado a otro; por otro lado, en el algoritmo de ant-cycle, el rastro de feromona se actualiza una vez el agente haya visitado todas las ciudades y completado así la ruta que actualiza con la misma proporción el rastro de feromona.

Supóngase que se tiene un agente k en cualquier etapa del proceso de búsqueda y en cualquier punto dentro del espacio de soluciones, sea $AQ_{(r,s)}^t$ el rastro actual (t) de feromona dejado por otros agentes que tomaron la decisión de moverse del punto r al punto s en instantes anteriores, y sea $HE_{(r,s)}^t$ el valor heurístico en la iteración t , asociado con la transformación de la configuración r a la s ; para el problema del vendedor viajante la función heurística está definida como:

$$HE_{(r,s)}^t = \frac{1}{d_{rs}} \quad [\text{Ec. 1}]$$

- $\delta \rightarrow$ Factor de peso que determina la importancia del rastro de feromona
- $\beta \rightarrow$ Factor de peso que determina la importancia del valor heurístico
- $q_0 \rightarrow$ Número aleatorio con distribución normal.
- $q \rightarrow$ Factor de escogencia tal que $0 \leq q \leq 1$.
- $S \rightarrow$ Variable aleatoria seleccionada de acuerdo a la distribución de probabilidades

En donde d_{rs} representa la distancia algebraica entre la ciudad r y la ciudad s ; es importante notar que se selecciona el inverso de la distancia, puesto que con el objeto de visitar varias ciudades, disminuyendo la distancia que se debe recorrer, resulta más atractivo visitar primero las ciudades más cercanas.

Un agente k situado en la configuración r decide cambiar a la configuración s siguiendo una regla denominada Regla de Transición de Estado.

$$s = \begin{cases} \arg \max_{u \in T_{k(r)}} \left\{ [AQ_{(r,u)}^t]^\delta [HE_{(r,u)}^t]^\beta \right\} & \text{si } q \leq q_0 \\ S & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad [\text{Ec. 2}]$$

Donde

Con un δ grande se favorece la escogencia de configuraciones ya visitadas por otras hormigas; por otro lado, factores β grandes favorecen la selección de configuraciones atractivas en el subespacio que se está explorando. La actualización del rastro de feromonas para el algoritmo de Sistemas de Hormigas se realiza usando la siguiente regla [9]:

$$AQ_{(r,s)}^t = (1 - \alpha)AQ_{(r,s)}^{t-1} + \sum_{k=1}^m \Delta AQ_{(r,s)}^k \forall (r, s) \quad [\text{Ec. 3}]$$

Donde:

- $\alpha \rightarrow$ Factor de evaporación o permanencia del rastro.
- $m \rightarrow$ Número total de hormigas.
- $t \rightarrow$ Iteración
- $\Delta AQ(r,s) \rightarrow$ Intensificación del camino cuando el agente pasa de r a s .
- $\gamma \rightarrow$ Factor de discontinuidad que pondera el rastro un estado vecino.

Este factor α de evaporación evita que se acumule de forma indefinida el rastro de feromona en los caminos, de no ser así, los agentes se verán abocados a explorar siempre

el mismo espacio de soluciones llegando finalmente a las mismas respuestas sin ser éstas necesariamente las óptimas.

El refuerzo o intensificación del camino es la cantidad de feromona que la hormiga k deja en la iteración t sobre el arco o camino r-s y está definido como:

$$\Delta AQ_{(r,s)}^k = \begin{cases} 1 & \text{si el camino r-s es} \\ L^k & \text{usado por el agente k} \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad [\text{Ec. 4}]$$

Donde L^k es la longitud total de la distancia recorrida por el agente en su recorrido, cuando ha terminado de visitar todas las ciudades; el rastro de feromona para la siguiente iteración se calcula entonces como:

$$AQ_{(r,s)}^t = (1-\alpha)AQ_{(r,s)}^{t-1} + \alpha(\Delta AQ_{(r,s)} + \gamma \max_{(s,z)} AQ_{(s,z)}^t) \quad [\text{Ec. 5}]$$

Para Colonias de Hormigas se han probado diferentes Reglas para Transiciones de Estado, todas ellas obtenidas a partir de la ecuación 2. Algunas de estas reglas son:

Regla Semi-Aleatoria: En esta regla, S es una variable aleatoria sobre el conjunto de posibles estados vecinos aún no visitados por el agente y que se guardan en la lista tabú T_k , la selección se hace de acuerdo a una distribución normal de probabilidades.

Regla Semi-Aleatoria Proporcional: Para esta regla, S es una variable aleatoria seleccionada de acuerdo a la distribución dada por la expresión

$$p_k^t(r, s) = \begin{cases} \frac{[AQ_{(r,s)}^t]^\delta [HE_{(r,s)}^t]^\beta}{\sum_{u \in T_k(r)} [AQ_{(r,u)}^t]^\delta [HE_{(r,u)}^t]^\beta} & \text{si } s \in J_k(r) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad [\text{Ec. 6}]$$

Esta función asigna a cada estado no escogido aún por el agente, una probabilidad que depende del rastro de feromona y de la función heurística propia.

Regla Aleatoria proporcional: es el mismo caso anterior, con la diferencia que q_0 para la expresión 2 vale cero. Esto obliga al algoritmo a escoger la siguiente acción de acuerdo exclusivamente a la ecuación 2.

Para el algoritmo se pueden implementar cualquiera de los criterios antes mencionados para actualizar el rastro de feromona. El primero consiste en esperar a que cada agente complete su ciclo y actualizar el rastro de los caminos que utilizó; el segundo criterio consiste en actualizar el rastro de cada camino en cada iteración [3].

El algoritmo general que se puede implementar en problemas de naturaleza similares al problema del vendedor viajante son:

1. */* Fase inicial */*

Para cada lazo, asignar un rastro inicial

Para k:=1 **hasta** m, **hacer**

 Ubicar a cada agente en una ciudad

 Actualizar la lista Tabú

Fin

2. */* Fase constructiva*/*

Para i:=1 **hasta** n **hacer**

Si $i \neq n$ **Entonces**

Para k:=1 **hasta** m **hacer**

 Escoja la próxima ciudad según criterio

 Actualice la lista Tabú

 Actualice el Tour

Fin

En Caso Contrario

 Se ha completado el Tour

Para k:=1 **hasta** m **hacer**

 Actualice los rastros de feromona

Fin

3. */* Fase Evaluativa*/*

Si se cumple alguna condición **entonces**

 Pare, respuesta encontrada

De los Contrario

Regrese a la fase 2.

Fin del programa.

El anterior pseudocódigo es una propuesta general construida entorno al problema del vendedor viajante y necesita ajustarse para poder ser aplicado a problemas de diferente naturaleza y estructura.

Dependiendo de la complejidad del problema y las condiciones particulares del mismo, el algoritmo puede sufrir modificaciones las funciones heurísticas cambian y las funciones de probabilidades se ajustan; estos parámetros dependen en gran medida del conocimiento que tenga el investigador de las características del problema que quiera resolver.

4.2. Modificaciones al Algoritmo Principal.

En algunas ocasiones y especialmente cuando el problema que se pretende resolver tiene un espacio de solución muy grande, el método puede quedar atrapado en determinadas regiones sin haber encontrado aún soluciones de buena calidad; por esta razón es necesario implementar modificaciones al algoritmo básico, acciones que desestabilicen (Daemon Actions⁴) el método para que pueda escapar de estas regiones.

Las Acciones Inesperadas se aplican en los siguientes casos:

- Si la función objetivo no mejora después de realizar cierto número de iteraciones del algoritmo.
- Si la región que se explora después de cierto número de iteraciones, tiene incumbentes⁵ de peor calidad que las obtenidas en otras regiones del espacio.
- Cuando los rastros de feromonas en ciertos caminos se han intensificado tanto, en detrimento de otros caminos que el método converge a soluciones iguales o por lo menos muy parecidas sin que ello implique una mejora en las incumbentes.
- Entre las Acciones Inesperadas que se pueden aplicar al método están:
 - Agregar un valor discreto de feromona a los rastros que se encuentren muy deteriorados, para motivar al método a buscar en otras regiones.
 - Actualizar los rastros con una complementación que permita al método cambiar drásticamente de región y así explorar zonas donde nunca se había explorado.
 - Disminuir en un valor constante aquellos rastros muy intensificados para permitirle al método la escogencia de ciertos trayectos que aún no había considerado.

⁴ Que ha traducido al castellano como Acciones Inesperadas

⁵ Es la mejor solución encontrada hasta el momento del proceso iterativo

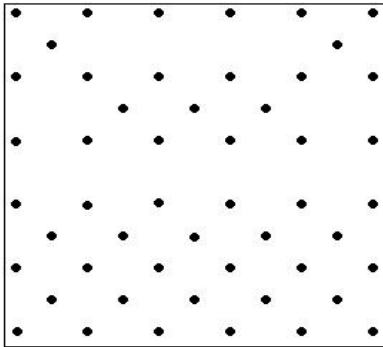
- Igualar todos los rastros de feromona, pero aumentar los parámetros de intensificación y evaporación durante cierto número de iteraciones, repitiendo el proceso para diversificar así la lista tabú.
- Cambiar los factores de peso durante ciertas iteraciones, para favorecer la diversificación o la intensificación según sea el caso.

Como ejercicio de prueba se tiene un problema con más de 50 ciudades todas interconectadas entre sí, esto con el fin de analizar el impacto de estas implementaciones matemáticas.

5. EJERCICIO DE APLICACIÓN

La figura 7 muestra 51 ciudades ubicadas simétricamente sobre una malla, con la particularidad de que todas se comunican entre sí a través de una línea recta. La distancia entre dos ciudades contiguas dispuestas en una línea horizontal o vertical es igual y en consecuencia se puede parametrizar asignándole el valor que se desee.

Figura No. 7 Problema de prueba, 51 ciudades.



Fuente: Elaboración de los autores.

Inicialmente se comenzó con un factor de actualización de 0.1, un $\beta=2$ y $\gamma = 1$ generándose la siguiente tabla

Factor de Permanencia	Ciclos de Colonia	Mejor Solución
0.7	21	51.73
0.8	20	51.73
0.9	17	44.26
0.95	16	44.26

0.975	16	44.26
0.98	17	44.27
0.99	17	44.26

Fuente: Elaboración de los autores.

Con un factor de evaporación de 0.975 y un $\gamma = 1$ se construyó la siguiente tabla

β	Ciclos de Colonia	Mejor Solución
0.5	30	55.01
1.0	25	51.73
1.5	21	44.26
1.75	20	44.26
2	18	44.26
2.15	16	44.27
2.25	19	44.26

Fuente: Elaboración de los autores.

Finalmente con un factor de permanencia de 0.975 un $\beta=2.15$ se cambió el valor de γ

γ	Ciclos de Colonia	Mejor Solución
0.75	24	49.07
0.90	20	48.49
1.0	18	44.26
1.1	16	44.26
1.2	15	44.26
1.3	17	44.27
1.4	19	44.26

Fuente: Elaboración de los autores.

Obteniéndose como valores óptimos para el problema

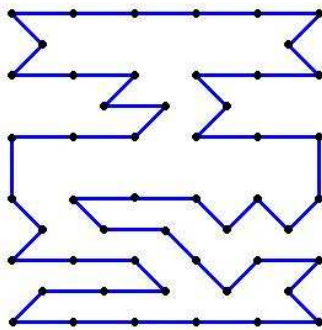
Factor de Permanencia $\rightarrow 0.975$

$\beta \rightarrow 2.1$

$\gamma = 1.2$

La figura 8 muestra la mejor configuración mostrada.

Figura No. 8 Mejor solución encontrada



Fuente: Elaboración de los autores.

Cuando se intentó implementar las acciones inesperadas, el método igualmente converge a la mejor solución antes hallada, sin embargo lo hizo con muchas más iteraciones lo que indica que para problemas pequeños este tipo de sub-algoritmos no son pertinentes.

6. CONCLUSIONES

1. Para permitir que el método desarrolle búsquedas en las diversas regiones dentro del espacio de soluciones, se debe facilitar valores moderados tanto en los factores de evaporación como en los factores de peso para las funciones heurísticas y de memoria adaptativa.
2. La decisión de tomar o no un camino cuando cada agente está situado en una determinada ciudad dada una configuración actual, depende de la experiencia alcanzada por otros agentes (memoria adaptativa), pero igualmente depende de la visibilidad que tenga este agente para la búsqueda local.
3. La función probabilística empleada por cada agente, está sujeta a dos factores; el rastro de feromona que es una memoria adaptativa y que es actualizada por cada agente y

una función heurística de visibilidad que indica cual configuración puede ser más atractiva dentro de una búsqueda local.

4. Los factores de peso para la función heurística y la función de memoria, son constantes en el algoritmo original, sin embargo pueden ser variables y ajustables a las necesidades propias del problema.

5. Es importante una cuidadosa selección de los rastros de feromona y la cantidad de ésta que se coloca en cada camino, pues si se evapora rápidamente, la búsqueda será muy aleatoria con muy poca probabilidad de encontrar soluciones de buena calidad; por otro lado, si el factor de permanencia es elevado, llevará a los agentes a explorar siempre los mismos espacios de soluciones, lo que los atrapará de manera apresurada en óptimos locales.

BIBLOGRAFÍA

[1] DORIGO M., Gambardella L. Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 1(1):53-56. 1997.

[2] DORIGO M., Maniezzo V., Colorni A.; Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 26 (1), pp 29-41,1996.

[3] DORIGO M., Stützle T. The Ant Colony Optimization Metaheuristic: Algorithms, Applications, and Advances. Université Libre de Bruxelles, IRIDIA.

[4] PARPINELLI R., Lopes H., Freitas A. Data Mining with Ant Colony Optimization Algorithm. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. Vol. 6, No. 4. August 2000.