

Aplicación de un Método Espectral en la Solución de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes¹

Applying a Spectral Method to Solve Second Order Differential Equations With Constant Coefficients

J. G. Paniagua, J.A. Pérez, y L.E. Naspirán

Recibido Agosto 06 de 2012 - Aceptado Noviembre 30 de 2012

Resumen - Los métodos espectrales han sido aplicados con éxito a las simulaciones numéricas en muchos campos, tales como conducción del calor, dinámica de fluidos, mecánica cuántica, entre otros. Son herramientas de gran alcance para hallar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

Este artículo presenta un método espectral basado en la interpolación polinomial en nodos distribuidos según mallas de Chebyshev, para resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes. Se evidencia la precisión de dicho método en comparación con el método de diferencias finitas y se fundamenta desde el punto de vista teórico esta superioridad.

Palabras Clave - Aproximación, diferencias finitas, ecuaciones diferenciales, matriz de Chebyshev, método espectral.

Abstract - Spectral methods have been successfully applied to numerical simulation in a variety of fields, such as heat transfer, fluid dynamics, quantum mechanics and so on. They are powerful tools for the numerical solutions of differential equations, ordinary and partial.

This paper presents a spectral method based on polynomial interpolation nodes distributed according to Chebyshev grids, to solve a second order ordinary differential equation with constant coefficients. It demonstrates the accuracy of this method as compared to finite difference method and this advantage is theoretically explained

Key Words - Approximation, finite differences, differential equations, Chebyshev matrix, spectral method.

I. INTRODUCCIÓN

Entre los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, los llamados métodos espectrales constituyen actualmente un campo de gran actividad tanto teórico como de aplicaciones. Ellos ocupan un destacado lugar como herramienta para la simulación numérica junto con los métodos de elementos finitos y diferencias finitas. En las últimas décadas han sido aplicados con éxito en campos tales como conducción del calor, dinámica de fluidos, mecánica cuántica y otros (Guo, 98).

La característica distintiva de los métodos espectrales es el uso de diferentes sistemas ortogonales de funciones de aproximación o de expansión (trial functions). Cada sistema de funciones de aproximación conduce a su correspondiente aproximación espectral. Así por ejemplo, para problemas periódicos se utilizan polinomios trigonométricos, para problemas no periódicos se usan polinomios de Chebyshev y de Legendre, para problemas sobre la semirrecta $x \geq 0$ polinomios de Laguerre y para problemas en la recta real polinomios de Hermite.

Los inicios de los métodos espectrales pueden ubicarse a principios del siglo XX. Entre los hitos importantes se pueden mencionar los trabajos de Galerkin (1915) en cuyo enfoque las funciones de aproximación y las funciones de ponderación son las mismas; Slater y Kantorovich (1934): método de colocación; Lanczos (1938) quien estableció que una adecuada elección de las funciones de aproximación y la

¹Producto derivado del proyecto de investigación "Análisis de la eficiencia del método espectral en la solución de una ecuación diferencial de segundo orden" registrado en el centro de investigación del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín.

distribución de los puntos de colocación son decisivas para la precisión de la solución; Clenshaw (1957) y Norton (1963): Método ortogonal de colocación; Villadsen y Stewart (1967): aplicación del método de colocación a problemas de valores en la frontera; Kreiss, Oliger y Orszag (1972): aplicación del métodos espectral de colocación a ecuaciones diferenciales parciales; Silberman (1954): aplicación del método de Galerkin en resolución práctica de ecuaciones diferenciales parciales en problemas de meteorología; Gottlieb y Orszag (1977): primera valoración matemática unificada de la teoría de los métodos espectrales; Funaro (1992) y Guo (1998) : aproximación de ecuaciones diferenciales por expansiones polinómicas; Tadmor(1998), Gottlieb y Hesthaven (2001), Cohen (2002), Bernardi Dauge y Maday (1999): aplicaciones específicas tales como problemas hiperbólicos, ecuaciones de onda y dominios con simetría axial.(Canuto, et al., 2006).

II. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO ESPECTRAL

Se considera el problema de valor inicial

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad -1 < x < 1 \quad (1)$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

Donde p y q son constantes reales, $y \in C^\infty[-1, 1]$ y f es una función de variable real.

Para simplificar el problema se supone que la función objetivo $y=y(x)$ está definida en el intervalo $[-1, 1]$. (Aunque luego veremos que esta restricción se remueve fácilmente, es decir, puede estar definida en otro intervalo).

Sobre el intervalo $[-1, 1]$ se define una malla no homogénea dada por los $n+1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n definidos por:

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n \quad (2)$$

llamados puntos o nodos de Chebyshev, los cuales son las proyecciones sobre el eje x de puntos igualmente espaciados sobre el círculo unitario (Ver figura 1). La razón para introducir este tipo de malla en lugar de una malla equiespaciada es que en este método espectral se utiliza interpolación polinomial la cual es muy sensible al efecto Runge (Trefethen, 2000), un fenómeno indeseable (similar al fenómeno de Gibbs) que consiste en la pérdida de convergencia de las aproximaciones polinomiales en los extremos del intervalo.

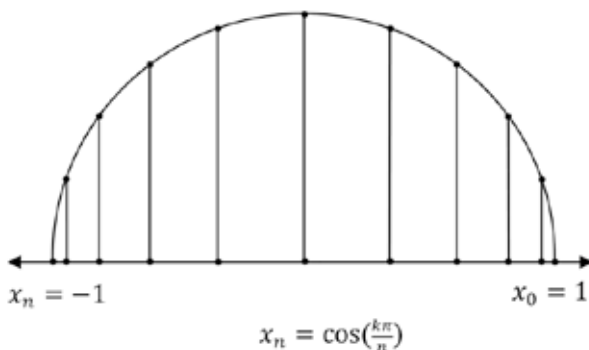


Fig. 1. Nodos de Chebyshev

Una aproximación discreta $r = [r_0, r_1, \dots, r_n]$ de la derivada de y en los nodos de Chebyshev se consigue calculando P_n , el polinomio de Lagrange que interpola la función y en los nodos y definiendo:

$$r_j = P_n'(x_j) \quad (3)$$

Se tiene entonces:

$$y'(x_j) \approx r_j = P_n'(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Existe un operador diferencial D_n representado por una matriz $(n+1) \times (n+1)$ llamada matriz de diferenciación de Chebyshev, tal que la ecuación (3) puede escribirse como

$$r = D_n [P_n(x_0), \dots, P_n(x_n)]^T \quad (5)$$

El operador diferencial D_n tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{2n^2+1}{6} & \dots & \frac{2(-1)^j}{1-x_j} & \dots & \frac{(-1)^n}{2} \\ \vdots & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \dots & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \vdots \\ -\frac{(-1)^i}{2(1-x_i)} & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \ddots & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \frac{(-1)^{n+i}}{2(1-x_i)} \\ \vdots & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \dots & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \vdots \\ -\frac{(-1)^n}{2} & \dots & -\frac{2(-1)^{n+j}}{1+x_j} & \dots & -\frac{2n^2+1}{6} \end{bmatrix}$$

También se obtiene una aproximación numérica de $y''(x_j)$:

$$y''(x_j) \approx v_j = P_n''(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

Donde para calcular $v = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ se utiliza la matriz D_n^2 , es decir:

$$v = D_n^2 P_n(x) = D_n^2 [P_n(x_0), \dots, P_n(x_n)]^T \quad (7)$$

Escribiendo en la notación de operador de operador la ecuación diferencial del problema (1) se obtiene

$$D_n^2 P_n(x_j) + p D_n P_n(x_j) + q P_n(x_j) = f(x_j) \quad (8)$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$

Ahora se verá que en realidad se puede reducir el orden de la matriz D_n eliminando la primera y última filas y también la primera y última columnas.

Debido a las condiciones de frontera del problema, el polinomio interpolante satisface las condiciones

$$p(x_0) = p(x_n) = 0$$

Por tanto simbolizando $p(x_j)$ como p_j la ecuación (5) se puede escribir en la forma

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} D_n$$

Donde se hace evidente que el valor de la primera y última fila en D_n es irrelevante.

Por otra parte como los valores de $p(x_0)$ y ya no son incógnitas podemos ignorar la primera y la última fila de D_n . En resumen podemos sustituir la matriz D_n por la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar en D_n la primera y última filas y también la primera y última columnas, a la cual llamaremos \tilde{D}_n .

Así, la expresión (7) se transforma en

$$[v_1, \dots, v_{n-1}]^T = \tilde{D}_n^2 [P_n(x_1), \dots, P_n(x_{n-1})]^T \quad (9)$$

Además, en la ecuación diferencial (8) se tiene

$$\tilde{D}_n^2 P_n(x_j) + p \tilde{D}_n P_n(x_j) + q P_n(x_j) = f(x_j) \\ j = 1, \dots, n-1$$

Para encontrar $P_n(x_j)$, la aproximación numérica de y , basta con solucionar el sistema lineal

$$\tilde{D}_n^2 P_n(x_j) + p \tilde{D}_n P_n(x_j) + q P_n(x_j) = f(x_j) \\ \Leftrightarrow [\tilde{D}_n^2 + p \tilde{D}_n + qI] P_n(x_j) = f(x_j) \\ \Leftrightarrow M P_n(x_j) = f(x_j)$$

Con $M = \tilde{D}_n^2 + p \tilde{D}_n + qI$, $P_n(x_j) = [P_1, \dots, P_{n-1}]$ y $f = [f_1, \dots, f_{n-1}]$, donde $f_j = f(x_j)$

1.1 Otras condiciones de Frontera.

Si se requiere resolver el problema general

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad a < x < b \quad (12) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

Introduciendo el cambio de variable

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{que equivale a} \\ t = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

El problema (12) se transforma en

$$k^2 u'' + kpu' + qu = f(kt+s), \quad -1 < t < 1 \quad (13) \\ u(-1) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

$$\text{donde } k = \frac{dt}{dx} = \frac{2}{b-a} \text{ y } s = \frac{a+b}{2}$$

Dividiendo por k^2 y renombrando las constantes se puede escribir:

$$u'' + pu' + qu = g(t), \quad -1 < t < 1 \quad (14) \\ u(-1) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

Ahora se efectúa la transformación

$$u(t) = y(t) + w(t)$$

Donde $w(t) = \frac{1}{2}\alpha(1-t) + \frac{1}{2}\beta(1+t)$. Se observa que $u(-1) = \alpha$ y $u(1) = \beta$.

Con esto el problema puede llevarse a la forma $y'' + py' + qy = h(t)$, $-1 < t < 1$ (15)

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

Donde, $h(t) = g(t) - \frac{1}{2}p(\beta - \alpha) - qw(t)$ que tiene evidentemente la forma del problema (1)

1.2 Estimativos del error

Es importante destacar la diferencia que existe entre las tasas de convergencia de los métodos de diferencias finitas y los métodos espectrales.

A medida que N aumenta, el error que se genera en un esquema de diferencias finitas o elementos finitos normalmente disminuye en un orden de $O(N^{-m})$ para alguna constante m que depende del orden de aproximación y la suavidad de la solución.

Para un método espectral, se consigue una convergencia del orden $O(N^{-m})$ para todo m (es decir m arbitrariamente grande), siempre que la solución sea infinitamente diferenciable, e inclusive, se consigue una convergencia más rápida a una tasa de $O(c^N)$ ($0 < c < 1$) si la solución es adecuadamente analítica. A este comportamiento se le llama *precisión espectral*. (Trefethen, 2000).

En general un interpolante polinomial sobre una malla uniformemente espaciada tiene un pésimo comportamiento. Cuando una función suave se interpola mediante un polinomio en una malla equiespaciada de $N+1$ puntos la convergencia de la aproximación falla cuando $N \rightarrow \infty$ y más aun, empeora a una tasa de 2^N . Si se intenta calcular las derivadas espectrales derivando tal aproximación el error crece en un factor similar. El enfoque correcto es utilizar interpolación polinomial en una malla no uniforme que acumule los puntos en los extremos. La característica esencial de esta malla de puntos es que cuando $N \rightarrow \infty$, asintóticamente, los puntos están distribuidos con una densidad (por unidad de longitud) dada por

$$\frac{N}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

El ejemplo más simple de una de tales mallas es el conjunto de nodos de Chebyshev, definidos en (2). Para explicar porqué esta distribución es adecuada, se utiliza la teoría del potencial en el plano complejo (Trefethen, 2000).

Sea p un polinomio de grado N definido por,

$p(z) = \prod_{k=1}^N (z - z_k)$, donde $\{z_k\}$ son las raíces de p , posiblemente complejas y contando multiplicidad.

Sea $\varphi_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln |z - z_k|$. Esta función puede interpretarse como el potencial en z debido a cargas puntuales en $\{z_k\}$ cada una con potencial $\frac{1}{N} \ln |z - z_k|$.

Claramente se tiene la relación

$$|p(z)| = e^{N\varphi_N(z)} \quad (16)$$

De donde puede deducirse que si $\varphi_N(z)$ es aproximadamente constante en $[-1, 1]$, entonces $p(z)$ se mantendrá aproximadamente constante en dicho segmento y por otra parte si $\varphi_N(z)$ varía en $[-1, 1]$ el efecto sobre $|p(z)|$ serán variaciones que crecen exponencialmente con N .

Ahora consideremos que $N \rightarrow \infty$ de modo que la malla de puntos $\{x_j\}$ se distribuye en $[-1, 1]$ con una densidad dada por una función $\rho(x)$ que satisface la condición

$$\int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1$$

Supongamos que la malla $\{x_j\}$ se distribuye en $[-1, 1]$ según la distribución de Chebyshev:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1] \quad (17)$$

A esta densidad corresponde el potencial

$$\varphi(z) = \ln \frac{1}{2} \left| z - \sqrt{z^2 - 1} \right| \quad (18)$$

Las curvas de nivel de φ son elipses con focos en ± 1 . En particular la elipse que degenera en el segmento $[-1, 1]$ es una curva de nivel de φ a lo largo de la cual el valor de φ es

$$\varphi(z) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Por lo tanto, si un polinomio mónico p tiene N raíces ubicadas en $[-1, 1]$ según la distribución de Chebyshev, entonces los valores de p sobre $[-1, 1]$ oscilarán entre valores de tamaño comparable, de un orden 2^{-N} , puesto que, retomando (16):

$$|p(x)| \approx e^{N\varphi(x)} = e^{N(-\ln 2)} = 2^{-N} \quad (19)$$

La precisión espectral en el caso que presentamos se debe al siguiente teorema (Trefethen, 2000):

Teorema: Precisión de la derivada espectral de Chebyshev

Supongamos que u es una función compleja analítica sobre y dentro de la elipse de focos ± 1 sobre la cual el potencial de Chebyshev toma el valor φ_f , esto es, la elipse cuyos semiejes mayor y menor suman $K = e^{\varphi_f + \ln 2}$. Sea w la ν -ésima derivada espectral de u , ($\nu \geq 1$). Entonces

$$|w_j - u^{(\nu)}(x_j)| = O(e^{-N(\varphi_f + \ln 2)}) = O(K^{-N})$$

cuando $N \rightarrow \infty$.

2. Experimentos numéricos

Con el fin de mostrar el desempeño del método espectral se resolverán dos problemas de valor inicial tanto por el método espectral como por el método de diferencias finitas. Se mostrará una gráfica donde se compara la solución exacta y la solución aproximada y otra donde se compara el error absoluto ($|\text{sol. exacta} - \text{sol. aproximada}|$) obtenido para cada método.

1.1.1 Ejemplo 1

Aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + y = xe^x - x, \quad -1 < x < 1$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

La solución exacta de este problema de valor inicial es

$$y = \frac{x^3 e^x}{6} - x + \frac{3e^x}{2e} + \frac{ee^x}{2} - \frac{xe^x}{6} + \frac{3xe^x}{2e} - \frac{exe^x}{2} - 2$$

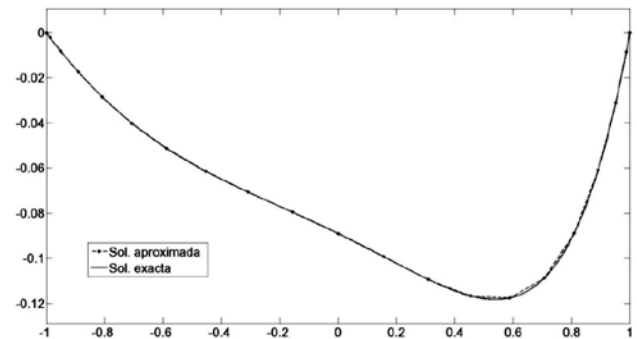


Figura 3. Solución exacta vs. Solución aproximada método espectral ejemplo 1

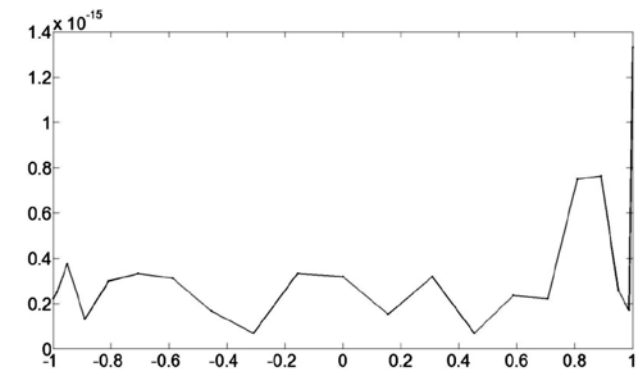


Figura 4. Error obtenido en la aproximación por método espectral ejemplo 1

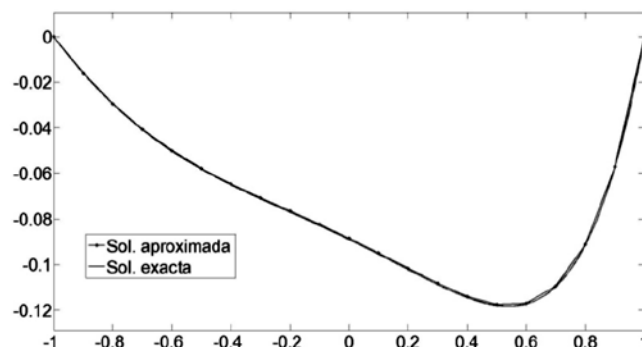


Figura 5. Solución exacta vs. Solución aproximada método diferencias finitas ejemplo 1

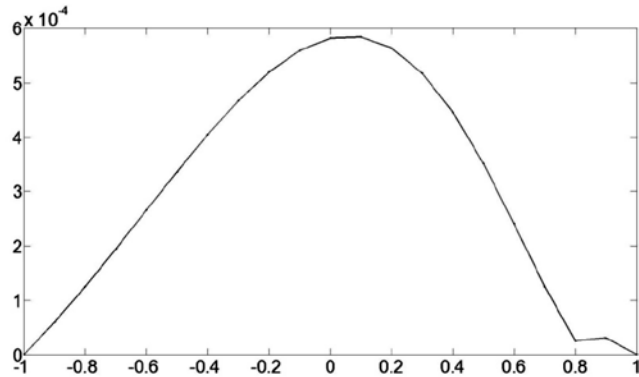


Figura 6. Error obtenido en la aproximación por método de diferencias finitas numérica ejemplo 1

1.1.2 Ejemplo 2

Aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x), \quad -1 < x < 1$$

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$$

La solución exacta del problema de valor inicial es

$$y = \frac{xe^x \sin(2x)}{4} - \frac{e^x \cos(2x) \sin(2)}{4 \cos(2)}$$

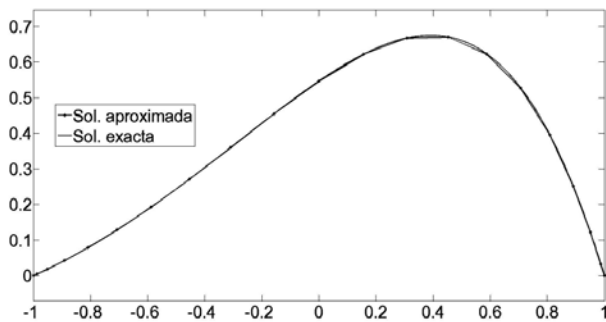


Figura 7. Solución exacta vs. Solución aproximada método espectral ejemplo 2

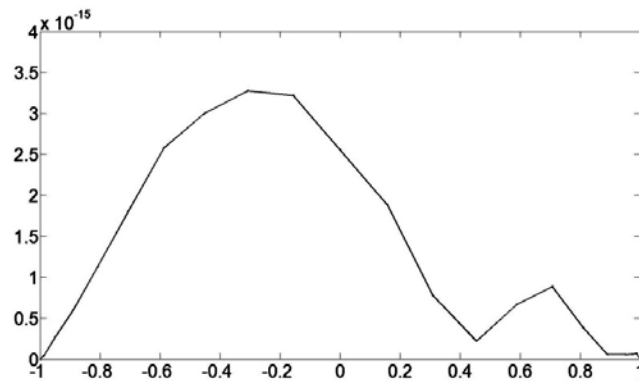


Figura 8. Error obtenido en la aproximación por método espectral ejemplo 2

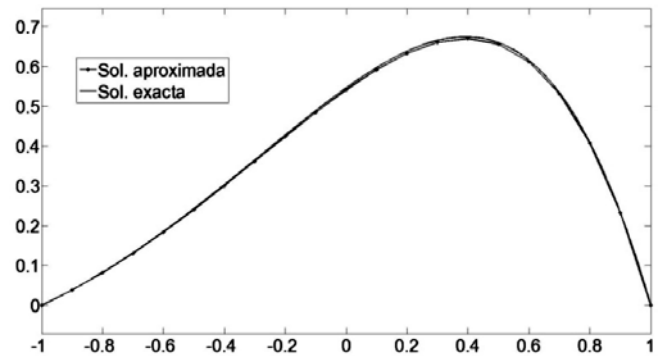


Figura 9. Solución exacta vs. Solución aproximada método diferencias finitas ejemplo 2

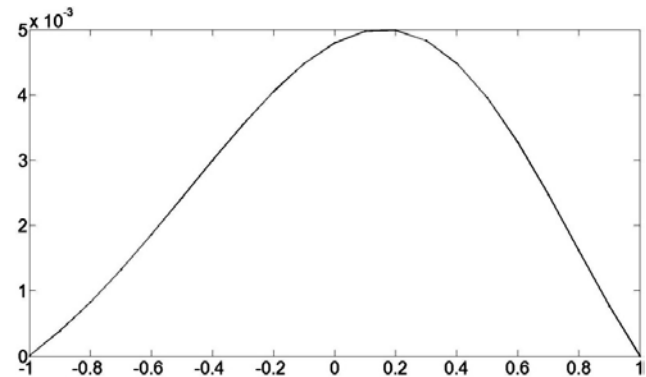


Figura 10. Error obtenido en la aproximación por método de diferencias finitas ejemplo 2

Las soluciones obtenidas por el método espectral al problema de valor inicial muestran una precisión mucho mayor que las encontradas con el método de diferencias finitas. El error obtenido usando 20 nodos con el método espectral es del orden de 10^{-15} , mientras que el método de diferencias finitas arroja valores del error del orden de 10^{-4} .

Al incrementar el número de nodos en el método de diferencias finitas (alrededor de 17000) se obtienen valores del error del orden de 10^{-9} , aún 6 órdenes de magnitud por encima del obtenido con el método espectral. Este aumento de nodos genera incrementos ostensibles en el tiempo de máquina.

Todos los experimentos numéricos se realizaron con Matlab R2011b, usando algunas subrutinas que se encuentran en (Trefethen, 2000), en particular, las rutinas que generan los nodos y la matriz de diferenciación de Chebyshev. Las soluciones exactas y los gráficos se obtuvieron usando comandos de Matlab.

III. CONCLUSIONES

Al resolver problemas de valor inicial con ecuaciones de segundo orden (coeficientes constantes) el método espectral produce soluciones mucho más precisas que el método de diferencias finitas y esta ventaja no puede reducirse aumentando el número de nodos.

La magnitud del error obtenido usando el método espectral es del orden de 10^{-15} , muy cercano al épsilon de la máquina ($\epsilon = 2.2 * 10^{-16}$). Es decir que el método aprovecha al máximo la precisión numérica disponible.

La precisión del método espectral utilizado aquí se basa en la condiciones de regularidad de la función objetivo, esto es, en el hecho que esta función es infinitamente diferenciable. Se puede verificar que las funciones solución (objetivo) de los problemas de valor inicial se ajustan a las condiciones dadas, es decir, son funciones infinitamente diferenciables en $[-1, 1]$.

Como era de esperarse, las aproximaciones polinomiales a las soluciones obtenidas por el método espectral se comportan bien en los extremos de los intervalos correspondientes. Es decir, el error no se desborda cerca de estos extremos, como puede verse claramente en la figura 4 y en la figura 8.

REFERENCIAS

- [1] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, Series in applied Mathematics. Paris, Gauthier –Villars, 1999.
- [2] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang, *Spectral methods: Fundamentals in Single Domains*, Berlin, Springer science + Business media, 2006.
- [3] C. W. Clenshaw, *The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., no. 53, pp. 134-149, 1957.
- [4] C.W. Clenshaw, H. J. Norton, *The Solution of Nonlinear Ordinary Differential Equations in Chebyshev Series*, Comput. J., no 6, pp. 88-92, 1963.
- [5] G. Cohen, *Higher-order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Scientific Computation, Berlin, Springer Verlag, 2002.
- [6] D. Funaro, *Polynomial Approximation of Differential Equations*, Berlin, Springer Verlag, 1992.
- [7] B. G. Galerkin, *Rods and Plates, Series Solution of some Problems in Elastic Equilibrium of Rods and Plates*, Vestnik inzhenerov Teckhnikov, no. 19, pp. 897-908, 1915.
- [8] D. Gottlieb, S. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods*, Philadelphia, PA, SIAM, 1977.
- [9] B. Y. Guo, *Spectral methods and their applications*, Singapore, World scientific, 1998.
- [10] S. Hesthaven, D. Gottlieb, *Spectral Methods for Hyperbolic Problems*, J. Comput. Appl. Math, no. 128, pp. 83-131, 2001.
- [11] L.V. Kantorovic, *On a New Method of approximate Solution of partial Differential Equations*, Doklady Akademii Nauk, SSSR, no.4, pp. 532-536, 1934.
- [12] H.O. Kreiss, J. Oliger, *Comparison of accurate Methods for the Integration of Hyperbolic Equations*, Tellus, no.24, pp. 199-215, 1972.
- [13] C. Lanczos, *Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions*, J. Math. Phys., no. 17, pp. 123-199, 1938.
- [14] I. Silberman, *Planetary Waves in the Atmosphere*, J. Meteorol, no. 11, pp. 27-34, 1954.
- [15] E. Tadmor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lecture notes in Mathematics 1697, 1997 C.I.M.E., Course in Cetraro, Italia, 1998.
- [16] L. Trefethen, *Spectral Methods in Matlab*, Philadelphia, PA, SIAM, 2000.
- [17] J. V. Villadesen, W. E. Stewart, *Solution of Boundary Value Problems by Orthogonal Collocation*, Chem. Eng. Sci., no. 22, pp. 1483-1501, 1967.



Juan Guillermo Paniagua nació en Medellín, Colombia en 1972. Se graduó en ingeniería mecánica en la Universidad de Antioquia y como magister en educación y desarrollo humano en la universidad de Manizales. Ha participado en diversos eventos nacionales e internacionales, tales como el Congreso Colombiano de Matemáticas (2011) y congreso de formación y modelación en ciencias básicas (2011 y 2012).

Ha trabajado como docente en la Universidad Pontificia Bolivariana, Politécnico Jaime Isaza Cadavid y en el Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín.

Entre sus áreas de interés se encuentra la modelación, los métodos numéricos y las ecuaciones diferenciales.

El profesor Paniagua actualmente es coinvestigador del grupo de investigación MAPLEST (matemática aplicada y estadística) del ITM.



John Alexander Pérez nació en Medellín, Colombia en 1974. Se graduó como Matemático y como especialista en matemática avanzada en la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín y como magister en matemática aplicada en la Universidad EAFIT. Ha participado en eventos como el congreso de formación y modelación en ciencias básicas (2011 y 2012).

Ha trabajado como docente en la Universidad Nacional y en el Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Entre sus áreas de interés se encuentran los métodos numéricos y las ecuaciones diferenciales.

El profesor Pérez actualmente es integrante del grupo de investigación MAPLEST (matemática aplicada y estadística) del ITM.



Luis Eduardo Naspirán Herrera nació en Pasto, Colombia en 1964. Se graduó como licenciado en matemáticas en la Universidad de Nariño y como magister en matemática en la Universidad Nacional sede Medellín. Ha participado en diversos eventos de nivel nacional, tales como el Simposio de Sistemas y señales (2005) y el congreso de formación y modelación en ciencias básicas (2011 y 2012).

Ha trabajado como docente en la Universidad Nacional y en el Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Entre sus áreas de interés se encuentran los métodos numéricos y las ecuaciones diferenciales.

El profesor Naspirán actualmente es líder del grupo de investigación MAPLEST (matemática aplicada y estadística) del ITM.